9 Derivadas

1. A partir de la función $f(x) = \sqrt{1 - \ldots}$ calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2. Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x & \text{si } x \leq 4 \\ \sqrt{x} - 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

¿Qué característica presenta $f(x)$ en $x = \ldots$

3. Calcula: $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h}$

si $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

La teoría del Big Bang sobre el origen del universo no deja claro si este continuará expandiéndose indefinidamente o si, por el contrario, este proceso se detendrá en un determinado momento y el universo se contraerá hasta verse reducido a un punto.

Para determinar cuál puede ser el final del cosmos, los astrónomos intentan calcular el valor de la velocidad con la que se expande.

A finales de 1998, dos grupos de astrónomos, uno de la Universidad de Berkeley y otro del Lawrence Berkeley National Laboratory, llegaron a la conclusión de que el universo seguirá expandiéndose indefinidamente.

Muchos de los cálculos que se efectúan para realizar estas investigaciones precisan del concepto de derivada, que es objeto de estudio en esta unidad.

1 Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo $[a, a+h]$ es el cociente entre el incremento que experimenta la función en ese intervalo, $f(a+h) - f(a)$, y la amplitud del intervalo, h.

$$\text{TVM } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Gráficamente, el valor de este cociente es la pendiente de la recta secante que corta a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$.

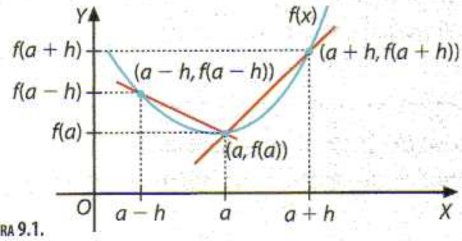


FIGURA 9.1.

Observa

$h \neq 0$, y puede ser $h > 0$ y $h < 0$.

Ejemplos

1. *Hallar la tasa de variación media de la función* $f(x) = x^2 - x$ *en los intervalos* $[3, 5]$ *y* $[5, 7]$.

$$\text{TVM } [3, 5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{20 - 6}{2} = 7$$

$$\text{TVM } [5, 7] = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{42 - 20}{2} = 11$$

2. *Hallar la tasa de variación media de la función anterior para cualquier intervalo de amplitud* h.

$$\text{TVM } [x, x+h] = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[(x+h)^2 - (x+h)] - [x^2 - x]}{h} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h} = \frac{2xh + h^2 - h}{h} = 2x - 1 + h$$

Considerando intervalos de amplitud cada vez menor, el límite gráfico de las sucesivas secantes cuando h se aproxima a cero, es la recta de color rojo que se observa en la figura 9.2. La pendiente de esta recta es el límite de la tasa de variación media cuando h tiende a cero. Este límite se denomina **tasa de variación instantánea** de la función $f(x)$ en $x = a$.

$$\text{TVI } (a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Así, por ejemplo, la tasa de variación instantánea de $f(x) = x^2 - x$ en $x = 3$ es $\text{TVI } (3) = \lim_{h \to 0} (2 \cdot 3 - 1 + h) = 5$.

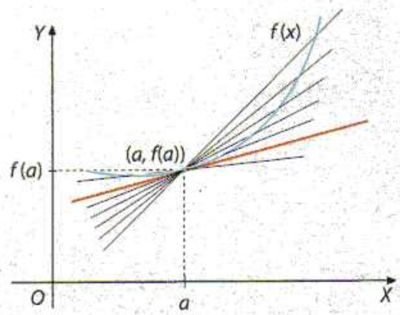


FIGURA 9.2.

Se dice que la función f es **derivable en** $x = a$ si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este límite se denomina **derivada** de f en $x = a$, y se denota por $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observa

$f'(a)$ es la tasa de variación instantánea, si existe, de la función f en $x = a$. El condicional, **si existe**, indica lo que llamaremos **derivada finita**.

Observa

Con esta definición de recta tangente como límite de rectas secantes se evitan las confusiones que se derivan de cualquier otra posible definición. Por ejemplo, es común admitir que la recta tangente a una función en un punto es una recta que corta en un solo punto a la función.

Las siguientes figuras ilustran tan desafortunada definición: en la figura 9.3.a, la recta no sería tangente a la gráfica, y lo es; y en la 9.3.b, se podría trazar más de una tangente en los puntos en que hay un cambio brusco de dirección, y, sin embargo, no existe recta tangente en $x = a$.

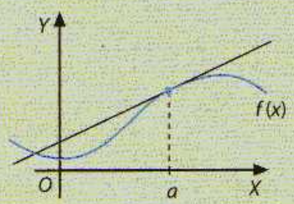


FIGURA 9.3.a.

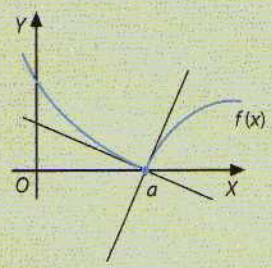


FIGURA 9.3.b.

En ocasiones se utiliza otra expresión equivalente para definir la derivada de f en a: tomando $x = a + h$, se tiene que $a = x - h$, por lo que si $h \to 0$, entonces $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se define la **tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa a** como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$. Su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Como consecuencia de la definición de tangente a una curva en un punto, se puede deducir que, si una función, f, es derivable en $x = a$, entonces existe una tangente a la curva de f en el punto $(a, f(a))$.

Ejemplos

3. *Sea la trayectoria de un móvil de ecuación $s(t) = t^2 - 5t$, donde la posición, s, se mide en metros y el tiempo, t, en segundos. Averiguar su velocidad en el instante $t = 3$.*

La velocidad mide la tasa de variación de la posición del móvil en un determinado intervalo de tiempo. Cuando no se indica un intervalo, sino un determinado instante, la velocidad instantánea coincide con la tasa de variación instantánea de la función $s(t)$ en un determinado instante, en nuestro caso $t = 3$. Por tanto, hemos de calcular $s'(3)$.

$$s'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{s(3+h) - s(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 5(3+h) - (3^2 - 5 \cdot 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 15 - 5h - (9 - 15)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (1 + h) = 1 \text{ m/s}$$

4. *Averiguar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \sqrt{x}$, en el punto de abscisa $x = 2$. Escribir las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto.*

Si existe $f'(2)$ coincidirá, por definición, con el valor de la pendiente de la tangente en el punto $(2, \sqrt{2})$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Por tanto, el valor de la pendiente de la tangente pedida es $m = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$ será:

$$y - \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La pendiente de la recta normal en $x = 2$ es $m_\perp = -1/m = -2\sqrt{2}$.

Por lo que su ecuación será:

$$y - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}(x - 2) \Rightarrow y = -2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}$$

Recuerda

La recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en un punto de abscisa a, es la perpendicular a la tangente en el punto $(a, f(a))$. Por ello, el producto de sus pendientes es -1:

$$m \cdot m_\perp = -1$$

Ejemplo

5. *Averiguar en qué punto la tangente a la curva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene pendiente -4, y escribir su ecuación.*

Calculamos $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[a - (a+h)]}{h[a\,(a+h)]} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h[a\,(a+h)]} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a\,(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

Si $f'(a) = -4 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} = -4 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, hay dos puntos de la gráfica en los cuales la tangente tiene pendiente -4, que son:

$$\left(\frac{1}{2}, 2\right) \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $a = \frac{1}{2}$ será:

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x + 4$$

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $a = \frac{-1}{2}$ será:

$$y + 2 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 4$$

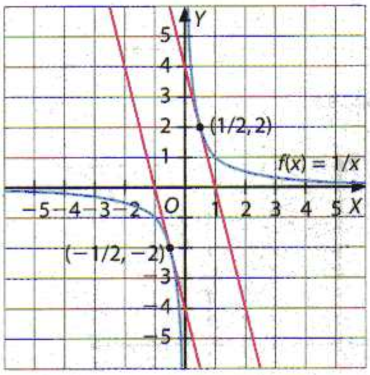


FIGURA 9.4.

Actividades

1 Dada la función $f(x) = (1 - x)^2$, calcula su derivada en el punto de abscisa 1. ¿Qué puedes decir acerca de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto?

Solución: $f'(1) = 0$

2 Averigua el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: $m = 4$

3 Calcula la pendiente de la tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$. A continuación, escribe la ecuación de dicha recta.

Solución: $m = f'(4) = \frac{1}{4}$.

La recta tangente es $y = \frac{x}{4} + 1$.

4 Averigua en qué punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$, la pendiente de la recta tangente es 4.

Solución: En el punto (3, 3).

5 Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x + 2}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: Recta tangente: $y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$.

Recta normal: $y = -4x + 10$.

2 Derivadas laterales

A partir de la definición de derivada de una función en un punto se pueden definir las derivadas laterales utilizando el concepto de límite lateral.

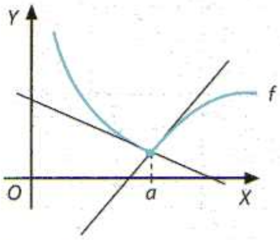


FIGURA 9.5.

> Así, si existe $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, se dice que f es derivable por la izquierda en $x = a$.
>
> Dicho límite se escribe $f'_-(a)$.
>
> Si existe $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, se dice que f es derivable por la derecha en $x = a$.
>
> Dicho límite se escribe $f'_+(a)$.

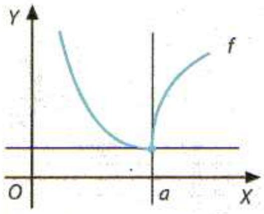


FIGURA 9.6.

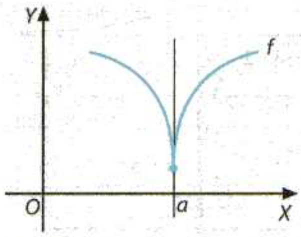


FIGURA 9.7.

De su definición se deduce que si una función es derivable en $x = a$, entonces sus derivadas laterales en $x = a$ existen y son iguales. Y viceversa, una función continua en $x = a$ es derivable en a si existen sus derivadas laterales en $x = a$ y ambas coinciden.

Dada una función continua en $x = a$, si las derivadas laterales en $x = a$ existen, pero no son iguales, la gráfica de la función presenta en $x = a$ un **punto anguloso.** Gráficamente, quiere decir que la recta tangente que se obtiene como límite del cociente incremental de la función es diferente a ambos lados del punto de abscisa $x = a$ (figura 9.5).

También puede suceder que una de las derivadas laterales en $x = a$ exista y la otra sea infinita. En este caso, el punto de abscisa $x = a$ también es un **punto anguloso** (figura 9.6).

Si las dos derivadas laterales en $x = a$ son infinitas y de distinto signo, siendo f continua en a, entonces el punto se denomina de **retroceso** (figura 9.7).

Ejemplo

6. *Calcular, si existe, la derivada de la función* $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x \geq 0 \\ (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$.

Puesto que en $x = 0$ se produce un cambio de expresión, en primer lugar deberemos averiguar si la función es continua en $x = 0$, porque en caso de no serlo no podría trazarse una recta tangente en el punto de abscisa cero, por lo que no existiría $f'(0)$.

Como $f(0) = 4$, y además:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (x+2)^2 = 4 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (x^2+4) = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 4$$

se cumple que el límite en $x = 0$ existe y coincide con $f(0)$, por lo que la función es continua en $x = 0$.

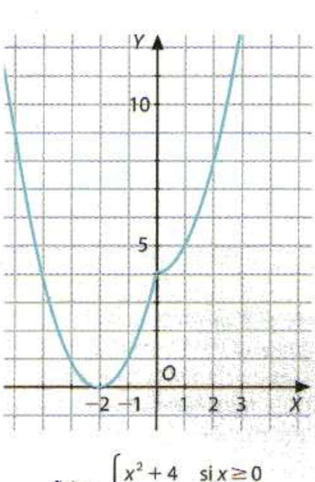
Para determinar si existe $f'(0)$, calculamos las derivadas laterales en $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(h+2)^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \to 0^-} (h+4) = 4$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 4 - 4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} h = 0$$

Como se observa, las derivadas laterales existen pero no son iguales, por lo que no existe la derivada en $x = 0$. La función presenta en el punto $(0, 4)$ un punto anguloso (figura 9.8).



$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x \geq 0 \\ (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

FIGURA 9.8.

Ejemplos

7. *Calcular, si existe, la derivada de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

Como se observa, la función está definida en todos los reales y $f(0) = 0$.

Calculamos $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$. Decimos que f tiene una derivada infinita en cero (positiva), del mismo signo, aunque calculemos sus derivadas laterales para h tendiendo a 0^+ o a 0^- (figura 9.9.a).

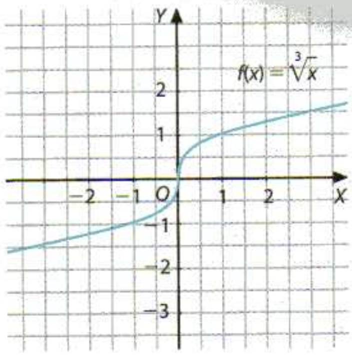


FIGURA 9.9.a.

8. *Calcular, si existe, la derivada de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

Como se observa, la función está definida en todos los reales y $f(0) = 0$.

Calculamos $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \left(\frac{1}{0}\right)$$

Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$. Es más, si calculamos el límite del cociente incremental para valores de h próximos a cero, pero de distinto signo, obtenemos:

$$f'_-(0) = -\infty$$

$$f'_+(0) = +\infty$$

Es decir, las derivadas laterales son infinitas y de distinto signo, por lo que la función presenta en $x = 0$ un punto al que denominamos de retroceso (figura 9.9.b).

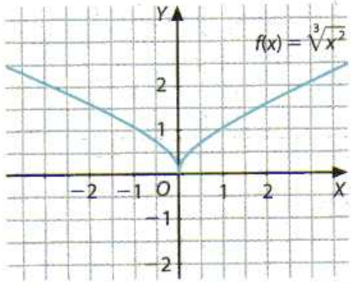


FIGURA 9.9.b.

Actividades

6 Determina, si existe, la derivada de la siguiente función en el punto de abscisa $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 2 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Solución: $f'(1) = -1$

7 Calcula si, en el punto de abscisa $x = 2$, existe la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución: No es continua en $x = 2$, por lo tanto no existe la derivada de f en dicho punto.

8 Determina si la función $f(x) = |x^2 - 1|$ es derivable en los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución: No es derivable en dichos puntos, puesto que las derivadas laterales en ellos son distintas: $f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 2$; $f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$

3 Continuidad y derivabilidad

Como se ha visto en los ejemplos, que una función sea continua en $x = a$ es una condición necesaria, pero no suficiente, para que la función sea derivable en $x = a$.

Una función puede ser continua y no ser derivable en $x = a$. Esto sucede, como se ha comprobado, en los puntos angulosos y de retroceso que puede presentar una función. Sin embargo, vamos a demostrar que si una función f es derivable en $x = a$, necesariamente debe ser continua en $x = a$.

Teorema: Si una función f es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$.

Demostración:

$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h$$

Si existe $f'(a)$, entonces $\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = f'(a) \cdot 0 = 0$.

Es decir, $\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = 0$, que equivale a $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Como podemos sustituir $a + h$ por x, entonces:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Así pues, f es continua en $x = a$.

Ejemplo

9. *Determinar si es derivable en $x = 1$ la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Primero debemos comprobar que f es continua en $x = 1$.

$f(1) = \ln 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$, la función es continua en $x = 1$.

Si es derivable en $x = 1$, sus derivadas laterales en 1 deben ser finitas y coincidir.

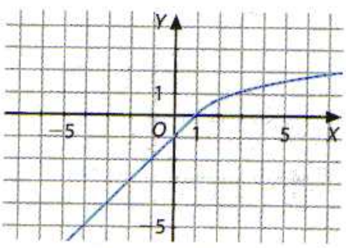
$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h) - 1 - (1-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \ln(1+h)^{1/h}$$

Como la función logaritmo es continua en su dominio, recordando cómo se resuelven los límites cuya indeterminación es 1^∞, tenemos:

$$f'_+(1) = \ln \lim_{h \to 0^+} (1+h)^{1/h} = \ln e = 1$$

Por consiguiente, las derivadas laterales en $x = 1$ coinciden, por lo que $f'(1) = 1$ (figura 9.10).



$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

FIGURA 9.10.

Ejemplo

10. *Calcular el valor del parámetro a para que sea derivable en x = 2 la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En primer lugar $f(x)$ debe ser continua en $x = 2$.

$f(2) = -4 + 2a$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (4 - x) = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x^2 + ax) = -4 + 2a$

Para que sea continua en $x = 2$, $f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$, por lo que:

$$-4 + 2a = 2 \Rightarrow a = 3$$

Puesto que la continuidad en $x = 2$ no es una condición suficiente para que exista $f'(2)$, calculamos las derivadas laterales en $x = 2$:

$$f'_-(2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{4 - (2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 3(2+h) - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-4 - 4h - h^2 + 6 + 3h - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0^+} (-h - 1) = -1$$

Por tanto, si $a = 3$ la derivada en $x = 2$ existe y vale $f'(2) = -1$.

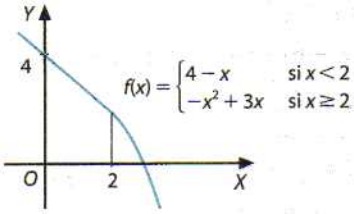


FIGURA 9.11.

Actividades

9 Determina si la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ es derivable en $x = -1$.

Solución: La función no es derivable en $x = -1$, ya que no es continua en $x = -1$.

10 Determina si es derivable en $x = 2$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: La función f es continua en $x = 2$, pero no es derivable, puesto que $f'_-(2) = 4$ y $f'_+(2) = 1$.

11 Calcula el valor del parámetro a para que sea derivable en $x = 1/2$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -\frac{a}{x} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución: Si $a = -\frac{2}{9}$, f es continua en $x = \frac{1}{2}$, pero no es derivable en $x = \frac{1}{2}$.

El punto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ es un punto anguloso.

4 Función derivada

4.1. Definiciones

> **Observa**
>
> La función derivada de f, f', no debe confundirse con el valor que dicha función puede tomar en $x = a$, es decir con $f'(a)$. La derivada de f es una función, y la derivada de f en a, si existe, es un número real.

Una función f es derivable en el intervalo (a, b) si y solo si existe $f'(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

> Se define la **función derivada de f** como la función que asocia a cada $x \in \text{Dom } f$, el valor de su derivada $f'(x)$, si este existe. La función derivada de f se denota por f'.
>
> $$f': x \to f'(x)$$
>
> El dominio de la función f' es un subconjunto del dominio de f:
>
> $$\text{Dom } f' \subset \text{Dom } f$$

Por ejemplo, la función $f(x) = |x^2 - 1|$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, presenta, como es sabido, dos puntos angulosos para $x = -1$ y $x = 1$, por lo que $\text{Dom } f' = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (figura 9.12).

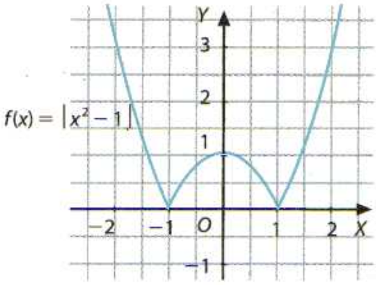


FIGURA 9.12.

> **Notación**
>
> También debes conocer la notación debida a Leibniz: $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$
>
> Con esta notación se indica respecto a qué variable se deriva la función, **no es un cociente.**

Ejemplo

11. *Dada la función $f(x) = 1/x^2$, hallar su función derivada. A continuación demostrar que la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ tiene otro punto de intersección con $y = f(x)$.*

Para cualquier $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 - (a+h)^2}{h a^2 (a+h)^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-(2a+h)}{a^2(a+h)^2} = \frac{-2a}{a^4} = \frac{-2}{a^3}.$$

Es decir, $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$. Como $f'(1) = -2$, la ecuación de la tangente en el punto de abscisa 1 es:

$$y - f(1) = -2(x - 1), \text{ es decir, } y = -2x + 3.$$

Como se observa, el dominio de la función f' coincide con el de f.

Si la recta $y = -2x + 3$ y la gráfica de f se cortan en algún otro punto, $y = f(x)$ deberá cumplirse para algún otro valor diferente de $x = 1$ que:

$$-2x + 3 = \frac{1}{x^2}, \text{ con } x \neq 0$$

Esta ecuación es equivalente a $-2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. Teniendo en cuenta que una solución es $x = 1$, factorizamos:

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & & -2 & 1 & 1 \\ \hline & -2 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$-2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (-2x^2 + x + 1) = 0$$

Como $-2x^2 + x + 1 = 0$ si $x = 1$ y $x = -\dfrac{1}{2}$, el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right)$ es el otro punto de intersección de la curva f y la tangente a f en $x = 1$ (véase la figura 9.13).

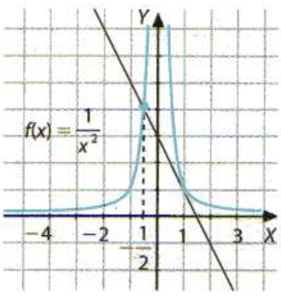


FIGURA 9.13.

La función derivada de f nos proporciona información acerca de f. En la siguiente unidad estableceremos con claridad la relación entre f' y f.

4.2. Derivadas sucesivas

Del mismo modo que se obtiene la derivada de una función f, también es posible obtener la derivada de f', que llamamos derivada segunda y denotamos por $(f')' = f''$. Su dominio es el conjunto de valores reales x en los que f' es derivable. Cuando existe $f''(a)$ se dice que la función f es dos veces derivable en $x = a$.

Aceleración

Si la función $s(t)$ proporciona la posición de un móvil en cada instante t de tiempo, su derivada segunda, $s''(t)$, es la tasa de variación instantánea de su velocidad en un cierto instante, t, es decir, su aceleración en dicho instante.

Este proceso se puede continuar. La derivada de la función f'' es la derivada tercera de f, $(f'')' = f'''$. Y así sucesivamente.

Como se puede observar, la notación para las derivadas de orden superior de f es algo engorrosa: se debe adoptar una notación más práctica.

Por lo general, la **derivada n-ésima** de f se denota por $f^{n)}$.

Es importante resaltar que existe una estrecha relación entre una función f y sus derivadas de orden superior.

Ejemplo

12. *¿Qué sucede con las derivadas sucesivas de la función $f(x) = (x - a)^2 + b$, cuya representación gráfica es una parábola con vértice en el punto (a, b)?*

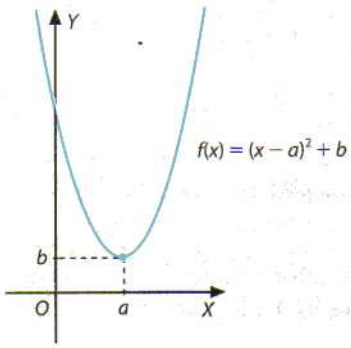


FIGURA 9.14.

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - a)^2 + b - [(x - a)^2 + b]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x - a)^2 + 2(x - a)h + h^2 + b - (x - a)^2 - b}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} [2(x - a) + h] = 2x - 2a$$

La representación gráfica de $f'(x)$ corresponde a una recta de pendiente 2 y ordenada en el origen $-2a$, tal como muestra la figura 9.15.

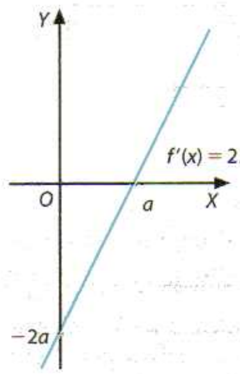


FIGURA 9.15.

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2(x+h) - 2a] - [2x - 2a]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

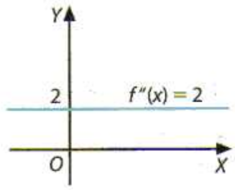


FIGURA 9.16.

La representación gráfica de $f''(x)$ es una recta, $y = 2$ (figura 9.16).

Como se deduce fácilmente, cualquier derivada de orden superior es cero, $f^{n)} = 0$, si $n > 2$ (figura 9.17).

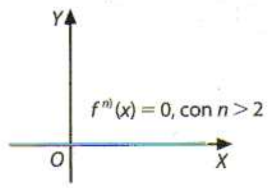
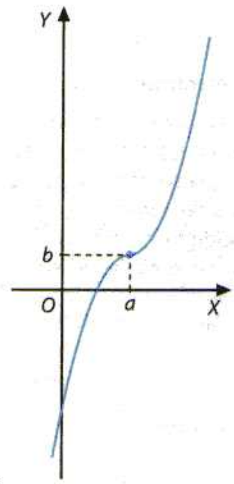


FIGURA 9.17.

La función $f(x) = (x-a)^2 + b$ es una función cuya gráfica no presenta ningún *sobresalto*, por lo que parece lógico que las gráficas de sus derivadas sucesivas sean continuas y sin picos. Pero en la función que se propone a continuación, que no es más que una pequeña modificación de la anterior, se observará que su aparente sencillez gráfica no se traduce en un comportamiento análogo al de la función anterior.



$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2+b & \text{si } x \geq a \\ -(x-a)^2+b & \text{si } x < a \end{cases}$$

FIGURA 9.18.

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2+b & \text{si } x \geq a \\ -(x-a)^2+b & \text{si } x < a \end{cases} \qquad \text{(figura 9.18)}$$

Para cualquier valor de $x > a$, la función derivada es la misma que hemos calculado anteriormente, $f'(x) = 2x - 2a$.

Realizando los cambios de signo oportunos, para cualquier valor de $x < a$, $f'(x) = -2x + 2a$.

Puesto que la función es continua en $x = a$, debemos calcular las derivadas laterales en este punto. Si existen y coinciden, existe $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(a+h-a)^2+b-[-(a-a)^2+b]}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-h^2) = 0$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{(a+h-a)^2+b-[(a-a)^2+b]}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0$$

Es decir, $f'(a) = 0$.

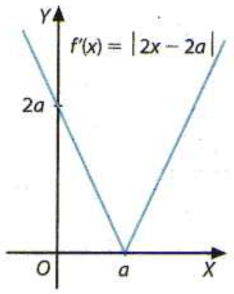


FIGURA 9.19.

Con todo esto, podemos escribir que $f'(x) = |2x - 2a|$. Su representación gráfica se muestra en la figura 9.19.

A partir de la gráfica indicada se observa que la derivada segunda está definida para todos los reales excepto $x = a$, puesto que f' presenta un *pico* en dicho punto:

f'' no es continua en $x = a$ (figura 9.20).

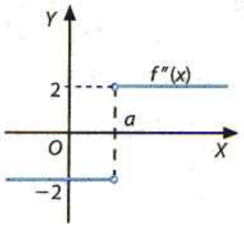


FIGURA 9.20.

Por tanto, como se verá en la siguiente unidad, del estudio de las derivadas sucesivas de una función será posible extraer información acerca del comportamiento de dicha función.

Actividades

12 Dada la función $f(x) = 3x^2 - x$, calcula $f'(1)$, $f''(-2)$ y $f'''(2)$.

Solución: $f'(1) = 5$, $f''(-2) = 6$, $f'''(2) = 0$.

13 Halla las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^3 - 2$.

Solución: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{n)}(x) = 0$, si $n \geq 4$.

14 Calcula la segunda derivada de la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2+b & \text{si } x \geq a \\ -(x-a)^2+b & \text{si } x < a \end{cases} \qquad \textbf{Solución: } f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > a \\ -2 & \text{si } x < a \end{cases}$$

15 Determina la función derivada de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad \textbf{Solución: } f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

5 Reglas de derivación

Aunque es muy importante recordar qué significa que una función sea derivable en $x = a$, y por tanto la definición de $f'(a)$, hay que reconocer que no es un procedimiento práctico para calcular la derivada de una función. También es cierto que a veces no es posible calcular de otra manera la derivada, pero existe un gran número de funciones que se pueden derivar mediante un proceso que consiste en conocer la derivada de algunas funciones elementales y el método para derivar operaciones realizadas entre ellas.

5.1. Derivada de la función constante

Si $f(x) = k$, entonces $f'(x) = 0$.

En efecto, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0 \text{ (figura 9.21)}$$

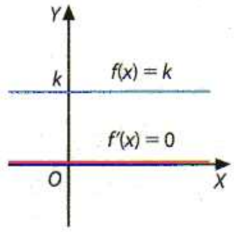


FIGURA 9.21.

5.2. Derivada de la función identidad

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$.

En efecto, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \text{ (figura 9.22).}$$

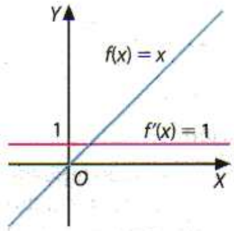


FIGURA 9.22.

5.3. Derivada de la función suma y producto

Si f y g son dos funciones derivables en $x = a$, entonces las funciones suma, $f + g$, y producto, $f \cdot g$, también son derivables en $x = a$ y se cumple:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$$

En efecto:

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - [f(a) + g(a)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$$

Para el producto tenemos:

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(a+h) - (f\cdot g)(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a)}{h} \overset{*}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h)[g(a+h) - g(a)]}{h} + \frac{[f(a+h) - f(a)]g(a)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(a+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(a) =$$

$$= f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$$

Observa

En esta igualdad (*) sumamos y restamos la expresión:

$f(a+h) \cdot g(a)$

En general, $\forall\, x$ en que f y g sean derivables, se cumple:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

5.4. Derivada de la función producto por un número real

Si $g(x) = k \cdot f(x)$, y f es derivable en $x = a$, entonces $g'(a) = k \cdot f'(a)$.

Para demostrar esta afirmación basta considerar $h(x) = k$:

$g'(a) = (h \cdot f)'(a) = h(a) \cdot f'(a) + h'(a) \cdot f(a)$

Como $h'(a) = 0$, tenemos: $g'(a) = h(a) \cdot f'(a) = k \cdot f'(a)$.

Para todo valor de x en que f sea derivable, $g'(x) = k \cdot f'(x)$.

5.5. Derivada de la función potencial

Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Demostración

Aunque la demostración realizada solo es válida para exponentes naturales, $n \in \mathbb{N}$, podría probarse que el resultado se mantiene cuando $n \in \mathbb{R}$.

Vamos a demostrar este resultado por inducción. Sabemos que se cumple para $n = 1$, suponemos que se cumple para un cierto valor de n, y estudiamos qué sucede para $n + 1$.

Sea $g(x) = x^{n+1}$. Como $g(x) = x \cdot x^n$, tenemos que:

$\forall\, a \in \mathbb{R}$, $g'(a) = a \cdot na^{n-1} + 1 \cdot a^n = n \cdot a^n + a^n = (n+1) \cdot a^n$

Es decir, si $g(x) = x^{n+1}$, entonces $g'(a) = (n+1) \cdot a^{n+1-1}$, como queríamos demostrar.

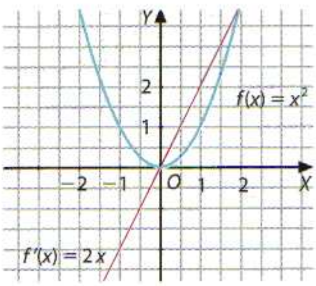


FIGURA 9.23.a.

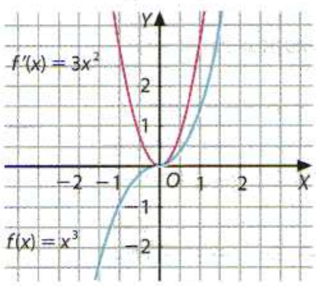


FIGURA 9.23.b.

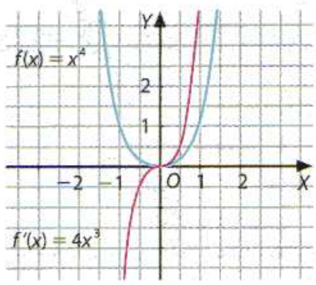


FIGURA 9.23.c.

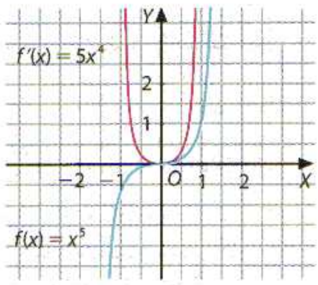


FIGURA 9.23.d.

Ejemplo

13. *Calcular la función derivada de* $f(x) = 3x^4 - x^2 + 3 - \dfrac{1}{3x} + 2\sqrt{x}$.

Escribimos esta función como: $f(x) = 3x^4 - x^2 + 3 - \dfrac{x^{-1}}{3} + 2x^{1/2}$, y, aplicando los resultados anteriores podemos averiguar $f'(x)$:

$$f'(x) = 12x^3 - 2x - \frac{-1x^{-2}}{3} + \frac{2x^{-1/2}}{2} = 12x^3 - 2x + \frac{x^{-2}}{3} + \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

$$= 12x^3 - 2x + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ejemplos

14. *Calcular la derivada de la función* $f(x) = (x - 2\sqrt{x}) \cdot (x^2 - 1)$.

Puesto que es un producto:

$$f'(x) = (x - 2\sqrt{x})' \cdot (x^2 - 1) + (x - 2\sqrt{x}) \cdot (x^2 - 1)' =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot (x^2 - 1) + (x - 2\sqrt{x}) \cdot 2x = 3x^2 - 5x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

15. *Hallar en qué punto de la gráfica de* $f(x) = x - \sqrt{x}$, *la tangente es paralela a la recta de ecuación* $3x - 4y + 1 = 0$.

La pendiente de la recta es $\frac{3}{4}$, por lo que debemos averiguar en qué punto $(a, f(a))$ de la gráfica se cumple $f'(a) = \frac{3}{4}$.

Derivamos f: $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

A continuación buscamos a: $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow a = 4$.

Por tanto, el punto buscado es (4, 2) (figura 9.24).

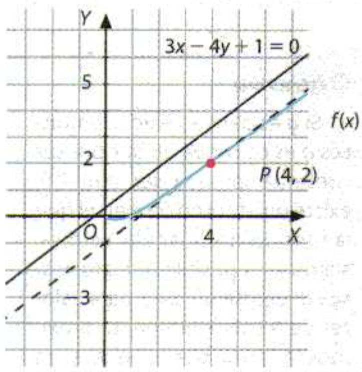


FIGURA 9.24.

Actividades

16 Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - \frac{2x}{3} - \frac{1}{x}$ ***c)*** $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

b) $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{5x^5}$ ***d)*** $f(x) = 3 - x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}$

Solución: ***a)*** $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{-4}{x^3} - \frac{3}{x^6}$

c) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{4}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ ***d)*** $f'(x) = \frac{-3\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

17 Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{x}\right)$ ***b)*** $f(x) = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot (x-1)^2$

Solución: ***a)*** $f'(x) = \frac{5x\sqrt{3x}}{2} - 3\sqrt{3x} - 1$ ***b)*** $f'(x) = 6x^2 - 8x + 2 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

18 Determina:

a) Para qué valores de x la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$ es paralela a la recta $y = 3$.

b) Los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya tangente es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x - 15y + 3 = 0$.

Solución: ***a)*** $x = -1$ y $x = 5$ ***b)*** (0, 0) y (4, −92)

19 Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por los puntos (1, 0) y (3, 0), y que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ tiene pendiente igual a − 1.

Solución: $a = 1/2$, $b = -2$, $c = 3/2$

20 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = ax^2 + b$, calcula a y b para que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: $a = 1/2$, $b = 1$

21 Calcula para qué valores de a las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ en $x = 1$ y $x = -1$ son perpendiculares entre sí.

Solución: $a = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

5.6. Derivada de la función $1/g$

Observa

Para llegar a la expresión que permita derivar un cociente de funciones, primero hemos de averiguar la derivada de la función $\frac{1}{f}$.

Si g es derivable en $x = a$, y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en $x = a$ y se cumple:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(1/g)(a+h) - (1/g)(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h \cdot [g(a) \cdot g(a+h)]} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(a) \cdot g(a+h)} = -g'(a) \cdot \frac{1}{(g(a))^2}$$

Para todo x en que g sea derivable y $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$.

Observa

Si g es derivable en a, entonces g es continua en a. Y por ser continua en a y ser $g(a) \neq 0$, existe un entorno de a en el que la función no se anula; esto es, siempre es posible que $g(a+h)$ sea diferente de cero, para valores de h suficientemente próximos a cero, por lo que para estos valores $\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)$ tiene sentido.

5.7. Derivada de la función cociente

Si f y g son derivables en $x = a$ y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en $x = a$, y se cumple:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

Como $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\right) =$$

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

Para todo valor x en que f y g sean derivables y $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Observa

Ahora también podemos derivar funciones racionales, pero todavía nos queda por aprender a derivar importantes funciones, como las funciones logarítmica y exponencial, las funciones circulares, así como una operación: la composición de funciones.

Actividades

22 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x - 2x^2}{x - 1}$ ***c)*** $f(x) = \frac{6x - 2x\sqrt{x}}{9 - x}$

b) $f(x) = \frac{(1 - x^3) \cdot (x - 1)}{x + 1}$ ***d)*** $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

Solución: ***a)*** $f'(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 3}{(x - 1)^2}$ ***b)*** $f'(x) = \frac{-3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2}{(x + 1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{54 - 27\sqrt{x} + x\sqrt{x}}{(9 - x)^2}$ ***d)*** $f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1}$

23 Averigua las ecuaciones de las rectas, de pendiente 1/2, tangentes a la gráfica de la función $f(x) = (x - 3)/(x - 1)$.

Solución: $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$; $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

5.8. Derivada de la función logarítmica

Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

En efecto, para todo $a \in \mathbb{R}^+$, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(a+h) - \ln a}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{a+h}{a}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{a+h}{a}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Como la función logarítmica es continua en $\mathbb{R}^+$:

$$f'(a) = \ln \lim_{h \to 0}\left(\frac{a+h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{a/h}\right)^{\frac{a}{h} \cdot \frac{1}{a}} = \ln e^{1/a} = \frac{1}{a}$$

Si $f(x) = \log_a x$, entonces $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$.

5.9. Derivada de la composición de funciones: regla de la cadena

Si g es derivable en $x = a$ y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en $x = a$ y se cumple:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Esta fórmula recibe el nombre de **regla de la cadena.**

Ejemplos

16. *Calcular la función derivada de* $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

Primero se determina el dominio de f: $\mathrm{Dom}\, f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

A continuación se observa que f es una función compuesta:

$$x \to x^2 - 1 \to \ln(x^2 - 1)$$

Por tanto, la función derivada será:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{x^2 - 1} \text{ y } \mathrm{Dom}\, f' = \mathrm{Dom}\, f$$

17. *Calcular la función derivada de* $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

$\mathrm{Dom}\, f = (-1, 1)$. Además, f es una función compuesta del siguiente modo:

$$x \to \frac{1-x}{1+x} \to \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \to \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Por tanto, primero deberíamos derivar la función logaritmo, a continuación la función potencial, y por último, la función racional. Pero, utilizando las propiedades de las operaciones con logaritmos, podemos escribir:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot [\ln(1 - x) - \ln(1 + x)]$$

Entonces, simplemente:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{1 - x^2} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$\mathrm{Dom}\, f' = \mathrm{Dom}\, f$.

Observa

Si $x \neq 0$, $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \left(\dfrac{-1}{-x}\right) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

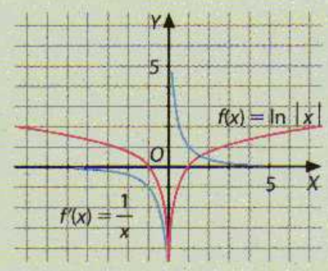


FIGURA 9.25.

Observa

El dominio de la derivada de una función debe estar contenido, o ser igual, al dominio de la propia función:

$$\mathrm{Dom}\, f' \subseteq \mathrm{Dom}\, f$$

Por este motivo, debemos restringir el dominio de f' al de f, y luego observar si existe algún punto del dominio de f que no deba estar en el de f' y eliminarlo.

De este modo, en el ejemplo 16, la expresión algebraica de f' es válida para todos los números reales excepto ± 1; pero como estos valores ya están excluidos del dominio de f, resulta que $\mathrm{Dom}\, f' = \mathrm{Dom}\, f$.

5.10. Derivación logarítmica

Con la regla de la cadena y la derivada de la función logarítmica, podemos realizar la siguiente reflexión:

Si $f(x)$ es una función que toma valores positivos, y $g(x) = \ln(f(x))$, entonces $g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, es decir, $f'(x) = f(x) \cdot g'(x)$.

Entonces, si necesitamos derivar una función $f(x)$, podemos hacerlo tomando precisamente logaritmos.

Por ejemplo, sea $f(x) = x^x$. Está definida en $\mathbb{R}^+$ y siempre toma valores positivos. Para derivar esta función, tomamos logaritmos y derivamos a ambos lados de la igualdad:

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \cdot \ln x$$

$$(\ln f(x))' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1)$$

Sustituimos $f(x)$ por su valor:

$$f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Este método de derivación se denomina **derivación logarítmica.**

Ejemplo

18. *Calcular la derivada de la función* $f(x) = (1 + x)^{\ln x}$.

El dominio de esta función es Dom $f = (0, +\infty)$.

Para hallar su derivada aplicamos derivación logarítmica.

Tomamos logaritmos a ambos lados de la igualdad:

$$\ln f(x) = \ln [(1 + x)^{\ln x}]$$

El logaritmo de una potencia es el producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\ln f(x) = \ln x \cdot \ln (1 + x)$$

Derivamos a ambos lados de la igualdad, teniendo en cuenta que a la derecha hay un producto:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \cdot \ln (1 + x) + \ln x \cdot \frac{1}{1 + x}$$

Despejamos $f'(x)$, que es lo que queríamos calcular:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[\frac{\ln (1 + x)}{x} + \frac{\ln x}{1 + x}\right]$$

$$f'(x) = (1 + x)^{\ln x} \left[\frac{\ln (1 + x)}{x} + \frac{\ln x}{1 + x}\right]$$

Observa

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$(1 + x)^{\ln x} \left[\frac{\ln (1 + x)}{x} + \frac{\ln x}{1 + x}\right] =$$

$$= (1 + x)^{\ln x} \cdot \ln \left[(1 + x)^{1/x} \cdot x^{1/(1 + x)}\right]$$

5.11. Derivada de la función exponencial

Si $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Vamos a realizar la demostración aplicando derivación logarítmica.

Como el recorrido de la función exponencial es $\mathbb{R}^+$, tomamos logaritmos:

$$f(x) = a^x \Rightarrow \ln f(x) = x \cdot \ln a$$

A continuación derivamos:

$$(\ln f(x))' = (x \cdot \ln a)'$$

$\ln a$ es una constante, por tanto:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$$

Despejamos $f'(x)$ y se obtiene:

$$f'(x) = f(x) \cdot \ln a, \text{ es decir, } f'(x) = a^x \cdot \ln a.$$

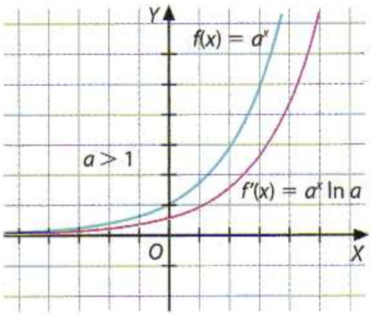


FIGURA 9.26.

5.12. Derivada de las funciones circulares

Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $f'(x) = \cos x \; \forall x \in \mathbb{R}$.

En efecto, si $f(x) = \text{sen } x$, tenemos:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } (a+h) - \text{sen } a}{h}$$

Como $\text{sen A} - \text{sen B} = 2 \cos \dfrac{\text{A}+\text{B}}{2} \cdot \text{sen } \dfrac{\text{A}-\text{B}}{2}$, sustituyendo se obtiene:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \cos\left(\dfrac{2a+h}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h/2}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\right] \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h/2} = \cos a \cdot 1 = \cos a$$

Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\text{sen } x \; \forall x \in \mathbb{R}$.

En efecto, si $f(x) = \cos x$, tenemos:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos (a+h) - \cos a}{h}$$

Como $\cos \text{A} - \cos \text{B} = -2 \text{ sen}\left(\dfrac{\text{A}+\text{B}}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\text{A}-\text{B}}{2}\right)$, sustituyendo:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{-2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{2a+h}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[-\text{sen}\left(a + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h/2}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[-\text{sen}\left(a + \frac{h}{2}\right)\right] \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h/2} = -\text{sen } a \cdot 1 = -\text{sen } a$$

Observa

En las demostraciones hemos utilizado que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Con esta información, y realizando la derivada de un cociente de funciones, se obtiene:

Si $f(x) = \text{tg } x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.

Para deducir la derivada de las funciones circulares inversas, arco seno, arco coseno y arco tangente, debemos averiguar la relación que guardan entre sí las derivadas de las funciones inversas respecto de la composición.

En primer lugar, para que exista la derivada de la función inversa $(f^{-1})'$ en a, debe ser derivable y diferente de cero la función f en $f^{-1}(a)$.

Si f y f^{-1} son funciones inversas respecto de la composición, debe cumplirse que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

Por tanto:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \text{ siempre que } f'(f^{-1}(x)) \neq 0.$$

Si $f(x) = \text{arc sen } x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Observa

También se puede hacer:
$y = \text{arc sen } x \Rightarrow \text{sen } y = x$

Derivando a ambos lados de la igualdad:

$\cos y \cdot y' = 1$, por lo que:

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

Como $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$ y $\text{sen } y = x$, se tiene:

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En efecto, $f(x)$ es la función inversa de la función seno respecto de la composición. Así pues:

$$(\text{sen }(\text{arc sen } x))' = 1$$

Aplicando la regla de la cadena: $\cos(\text{arc sen } x) \cdot (\text{arc sen } x)' = 1$.

Despejando:

$$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arc sen } x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

como se quería demostrar.

De modo análogo, se puede demostrar que:

Si $f(x) = \text{arc cos } x$, entonces $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Si $f(x) = \text{arc tg } x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5.13. Resumen de la derivada de las principales funciones compuestas

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$[g(x)]^n$	$g'(x) \cdot n \cdot [g(x)]^{n-1}$	$\text{sen } g(x)$	$g'(x) \cdot \cos g(x)$	$\text{arc sen } g(x)$	$g'(x) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$
$\ln g(x)$	$g'(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$	$\cos g(x)$	$-g'(x) \cdot \text{sen } g(x)$	$\text{arc cos } g(x)$	$g'(x) \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$
$\log_a g(x)$	$g'(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$	$\text{tg } g(x)$	$g'(x) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 g(x)} = g'(x) \cdot [1 + \text{tg}^2 g(x)] = g'(x) \cdot \sec^2 g(x)$	$\text{arc tg } g(x)$	$g'(x) \cdot \dfrac{1}{1+(g(x))^2}$
$a^{g(x)}$	$g'(x) \cdot a^{g(x)} \cdot \ln a$			$\text{arc cotg } g(x)$	$g'(x) \cdot \dfrac{-1}{1+(g(x))^2}$

Actividades

24 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = (1 + x) \cdot 2^{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

d) $f(x) = \ln (x + e^{-x})$

e) $f(x) = \sqrt{2^{2x+1} + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{3xe^{-x}}{\sqrt{e^x}}$

Solución: ***a)*** $f'(x) = 2e^{2x}$ ***b)*** $f'(x) = 2^{x+1} \cdot [1 + (1 + x) \ln 2]$ ***c)*** $f'(x) = \dfrac{-4}{e^{2x} + e^{-2x} - 2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ ***e)*** $f'(x) = \dfrac{2^{2x+1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^{2x+1} + 1}}$ ***f)*** $f'(x) = \dfrac{-9x + 6}{2e^x \sqrt{e^x}}$

25 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

d) $f(x) = \cos 2x^2$

e) $f(x) = \cos (x^2 - 3x)$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 - \cos x^2$

g) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x^2$

h) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2}$

i) $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} x^2)^2$

j) $f(x) = \ln \cos e^x$

Solución: ***a)*** $f'(x) = 2 \cos 2x$ ***b)*** $f'(x) = \operatorname{sen} 2x$ ***c)*** $f'(x) = 2x \cos x^2$

d) $f'(x) = -4x \operatorname{sen} 2x^2$ ***e)*** $f'(x) = -(2x - 3) \operatorname{sen} (x^2 - 3x)$

f) $f'(x) = 2x (\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2)$ ***g)*** $f'(x) = \dfrac{4x \operatorname{tg} x^2}{\cos^2 x^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ***i)*** $f'(x) = \dfrac{4x \operatorname{arc\,tg} x^2}{1 + x^4}$ ***j)*** $f'(x) = -e^x \operatorname{tg} e^x$

26 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$

b) $f(x) = \sqrt[x]{x - 2}$

c) $f(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)^{\operatorname{sen} x}$

Solución: ***a)*** $f'(x) = (\operatorname{sen} x)^x (\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{cotg} x)$

b) $f'(x) = \sqrt[x]{x - 2}\left(\dfrac{-\ln (x - 2)}{x^2} + \dfrac{1}{x^2 - 2x}\right)$

c) $f'(x) = (x \cdot e^x)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{x + \ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}\right)$

d) $f'(x) = 2 (\operatorname{tg} x)^{2 \operatorname{sen} x}\left(\ln (\operatorname{tg} x)^{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x}\right)$

27 Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$ con $-\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$ con $-\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$ con $-\dfrac{\pi}{2} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ con $0 \leq x < \pi$

Solución: ***a)*** $f'(x) = \dfrac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}$ ***b)*** $f'(x) = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$ ***c)*** $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ ***d)*** $f'(x) = \dfrac{1}{2}$

28 Halla el punto de la gráfica de $y = x + \ln x$ en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $2x + 6y = 5$.

Solución: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} - \ln 2\right)$

Ejercicios resueltos

Recta tangente

1. Considerar la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

a) **Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.**

b) **¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la que se ha encontrado? Razonar la respuesta y, en caso afirmativo, hallar la ecuación.**

La función es polinómica, continua y derivable en todos los números reales.

a) Calculamos el punto: $f(3) = 8$, por tanto el punto donde debe calcularse la ecuación de la recta tangente es $(3, 8)$.

La pendiente de esta tangente es $f'(3)$, por tanto calculamos la derivada de la función y sustituimos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f'(3) = 11$$

La ecuación de la recta en forma punto-pendiente es:

$$y - 8 = 11\,(x - 3) \Rightarrow y = 11x - 25$$

b) Cualquier otra recta tangente paralela a la anterior debe tener la misma pendiente, 11. Para ello debemos resolver la ecuación $f'(x) = 11$.

$$f'(x) = 11 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 11 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Una solución es $x = 3$, que ya conocemos. Además, cuando $x = -1$, la recta tangente también tiene pendiente 11.

Para escribir la ecuación de esta recta tangente procedemos como en el apartado anterior $f(-1) = -4$, por tanto el punto es $(-1, -4)$, y la recta:

$$y + 4 = 11(x + 1) \Rightarrow y = 11x + 7$$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determinar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto donde se anula la segunda derivada.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, debemos calcular en qué punto se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-x}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{x-1}{e^x} \Rightarrow f''(x) = 0 \text{ si } x = 1$$

El punto de la curva de abscisa $x = 1$ es:

$$\left(1, \frac{2}{e}\right)$$

En $x = 1$, la pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(1) = -\frac{1}{e}$$

La ecuación buscada es:

$$y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-x}{e^x} + \frac{3}{e}$$

3. Calcular, si existe, la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Veamos cuál es el punto de la ecuación que tiene abscisa $x = 1$.

$f(1) = 0$, así, el punto es $(1, 0)$.

Derivamos:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$\nexists\, f'(1)$, luego no existe recta tangente en este punto.

Derivabilidad y continuidad

4. Calcular el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} \cdot \cos ax & \text{si } x < 0 \\ \ln(e + x)^a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar, debemos analizar la continuidad de la función propuesta.

Para $x < 0$, es un producto de funciones continuas, por tanto continua. Y también para $x \geq 0$, puesto que es una función compuesta de funciones continuas para $x > -e$.

Para que sea derivable en $x = 0$, primero debe ser continua en dicho punto.

$f(0) = \ln e^a = a$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (e^{bx} \cdot \cos ax) = e^0 \cdot 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [\ln(e + x)^a] = a$

Para que sea continua en $x = 0$, el $\lim_{x \to 0} f(x)$ debe coincidir con la imagen $f(0)$, por lo que debe ser $a = 1$.

Con $a = 1$, para que sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales en dicho punto deben coincidir.

Puesto que la función es continua en $x = 0$, y además:

$$f'(x) = \begin{cases} b \cdot e^{bx} \cdot \cos x + e^{bx}(-\operatorname{sen} x) & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{e + x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

tenemos que la función derivada $f'(x)$ para $x \neq 0$ tiene límites laterales en $x = 0$. Los calculamos, y deben ser iguales para que exista $f'(0)$:

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} [b \cdot e^{bx} \cdot \cos x + e^{bx}(-\operatorname{sen} x)] = b$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{e + x}\right) = \dfrac{1}{e}$

$f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow b = \dfrac{1}{e}$

Por tanto, si $a = 1$ y $b = \dfrac{1}{e}$, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

Cálculo de la derivada de una función en un punto

A menudo se cae en la tentación de calcular la derivada de una función en un punto aplicando las reglas de derivación. Pero hay ocasiones en que la derivada de una función en un punto existe y, sin embargo, no existe el límite de la función derivada en ese punto. Para reflexionar sobre ello, proponemos el siguiente ejercicio.

5. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular su función derivada.

Esta función es continua en $x = 0$, puesto que $f(0) = 0$, y además:

$$\lim_{x \to 0} [x^2 \operatorname{sen}(1/x)] = 0$$

La función derivada para cualquier $x \neq 0$ es:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Para calcular $f'(0)$ como límite de la función $f'(x)$ cuando x tiende a cero, se observa que:

$\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$, puesto que no existe $\lim_{x \to 0} [2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)]$

(El límite del segundo sumando no existe cuando x tiende a cero.)

Sin embargo, si calculamos $f'(0)$ aplicando la definición de derivada en un punto, obtenemos:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0}\left[h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)\right] = 0$$

Por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esto es así, porque en este caso $f'(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que, aunque existe $f'(0)$, no existe $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

Cálculo de derivadas sucesivas

6. Calcular la derivada *n*-ésima de la función $f(x) = x \cdot \ln x$.

Algunas veces es posible determinar la derivada *n*-ésima de una función por iteración. Calculamos las primeras derivadas y observamos si hay alguna *cadencia:*

$$f'(x) = \ln x + 1 \qquad f^{4)}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \qquad f^{5)}(x) = \frac{-6}{x^4} = \frac{-3!}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad \ldots$$

Podemos suponer que $f^{6)}(x) = \dfrac{4!}{x^5}$

$4! = 24$, que es el coeficiente que se obtiene al derivar $f^{5)}(x) = \dfrac{-6}{x^4}$.

Respecto al signo, observamos que a partir de la derivada segunda es positivo para las derivadas de orden par y negativo para las de orden impar. Por tanto, podemos deducir que:

$$f^{n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, \text{ para } n \neq 1.$$

Ahora hay que verificar por inducción que la fórmula es cierta. Suponemos que se verifica para $n = k$; veamos si se cumple para $n = k + 1$.

Derivamos:

$$f^{k+1)}(x) = (-1)^k \cdot (k-2)! \cdot \frac{-k+1}{x^k} =$$

$$= (-1)^k \cdot (k-2)! \cdot \frac{(k-1)\cdot(-1)}{x^k} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$$

Por lo que la expresión hallada para la derivada *n*-ésima es cierta.

Derivación de funciones en forma implícita

Hay relaciones entre variables cuya expresión analítica no es de la forma $f(x) = y$. Por ejemplo, las ecuaciones de las cónicas relacionan de forma implícita sus variables, y en ocasiones es laborioso aislar la variable dependiente en función de la independiente. Pero podemos realizar la derivada de la función tal como está escrita, es decir, en forma implícita, aplicando la regla de la cadena, y teniendo en cuenta que derivamos respecto de la variable independiente, que es x, por lo que $x' = 1$.

7. Calcular la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ en los puntos de abscisa $x = 3$.

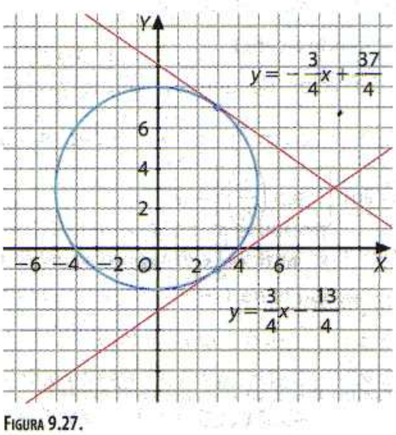


FIGURA 9.27.

Es evidente que despejar $y = f(x)$ no es sencillo. Por tanto, derivamos en forma implícita la ecuación. Tendremos que:

$$2xx' + 2yy' - 6y' - 0 = 0$$

$$2x + 2yy' - 6y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y-6} = \frac{-x}{y-3}$$

En $x = 3$, tenemos que $9 + y^2 - 6y - 16 = 0$, es decir, para averiguar las ordenadas de los puntos debemos resolver la ecuación $y^2 - 6y - 7 = 0$, y se obtiene: $y = -1$, e $y = 7$, por lo que los puntos en los que debemos calcular la tangente son $(3, -1)$ y $(3, 7)$.

La pendiente es $y'(3) = \dfrac{-3}{-1-3} = \dfrac{3}{4}$ en el punto $(3, -1)$, y la ecuación de la tangente en este punto es:

$$y - (-1) = \frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow y = \frac{3x}{4} - \frac{13}{4}$$

La pendiente es $y'(3) = \dfrac{-3}{7-3} = \dfrac{-3}{4}$ en el punto $(3, 7)$, y la ecuación de la tangente en este punto es:

$$y - 7 = \frac{-3}{4}(x-3) \Rightarrow y = \frac{-3x}{4} + \frac{37}{4}$$

Reglas de derivación y función derivada

1 Calcula la función derivada de estas funciones:

a) $f(x) = (x^2 + 3x)^3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

c) $f(x) = (\operatorname{sen} x + 1)^2$

d) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$

e) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 - 2}$

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

g) $f(x) = 3x\sqrt{x^2 - 1}$

h) $f(x) = 2^x \ln (x + 1)$

i) $f(x) = \dfrac{x\, e^x}{\ln x}$

j) $f(x) = x^2\, 2^x\, e^{2x}$

k) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{tg} x}$

l) $f(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \cos x$

Solución: ***a)*** $(6x + 9)(x^2 + 3x)^2$ ***b)*** $\dfrac{-2x}{(x^2 + 4)^2}$ ***c)*** $\operatorname{sen} 2x + 2 \cos x$ ***d)*** $2x \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x$ ***e)*** $\dfrac{-3x^2 - 2x - 6}{(x^2 - 2)^2}$ ***f)*** $e^{-x}(2x - x^2)$ ***g)*** $\dfrac{6x^2 - 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ***h)*** $2^x\left(\ln 2 \cdot \ln (x + 1) + \dfrac{1}{x+1}\right)$ ***i)*** $\dfrac{e^x (\ln x + x \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$ ***j)*** $2^x e^{2x}(2x + x^2 \ln 2 + 2x^2)$ ***k)*** $-\operatorname{sen} x - \cos x - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ ***l)*** $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

2 Calcula la función derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} (\operatorname{sen} (\cos x))$

b) $f(x) = \operatorname{sen} (\operatorname{sen} (\operatorname{sen}^2 x))$

c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} (\cos x)$

d) $f(x) = \cos (\operatorname{arc\,sen} x)$

e) $f(x) = \ln (\operatorname{sen} x^2)$

f) $f(x) = \ln \left(1 - \sqrt{x}\right)^3$

g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}}$

h) $f(x) = \operatorname{cotg}^3 (3x^3)$

i) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$

j) $f(x) = \ln (\operatorname{sen} x/x)$

k) $f(x) = 3x + \sqrt{\cos (2x + 1)}$

l) $f(x) = x \cdot \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2}$

m) $f(x) = \ln (\operatorname{sen} (\operatorname{arc\,cos} x))$

n) $f(x) = \ln (\operatorname{tg} (\operatorname{arc\,sen} x)$

Solución: ***a)*** $-\cos (\operatorname{sen} (\cos x)) \cdot \cos (\cos x) \cdot \operatorname{sen} x$ ***b)*** $\cos (\operatorname{sen} (\operatorname{sen}^2 x)) \cdot \cos (\operatorname{sen}^2 x) \cdot \operatorname{sen} 2x$ ***c)*** -1 ***d)*** $-1/\sqrt{1 - x^2}$ ***e)*** $2x \operatorname{cotg} x^2$ ***f)*** $\dfrac{-3}{2\sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)}$ ***g)*** $\cos 2x$ ***h)*** $\dfrac{-27x^2 \operatorname{cotg}^2 (3x^3)}{\operatorname{sen}^2 (3x^3)}$ ***i)*** $\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$ ***j)*** $\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$ ***k)*** $\dfrac{3 - \operatorname{sen} (2x + 1)}{\sqrt{\cos (2x + 1)}}$ ***l)*** $\operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ***m)*** $\dfrac{-x}{1 - x^2}$ ***n)*** $\dfrac{1}{x(1 - x^2)}$

3 De las siguientes funciones halla la derivada del orden que se indica:

a) $f(x) = \cos 2x \quad \Rightarrow \quad f^{4)}(x)$

b) $f(x) = 2^{1/x} \quad \Rightarrow \quad f'''(x)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad f^{4)}(x)$

d) $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \Rightarrow \quad f'''(x)$

e) $f(x) = \dfrac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'''(x)$

f) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} \quad \Rightarrow \quad f''(x)$

Solución: ***a)*** $16 \cos 2x$ ***b)*** $-2^{1/x}\left(\dfrac{\ln^3 2}{x^6} + \dfrac{6 \ln^2 2}{x^5} + \dfrac{6 \ln 2}{x^4}\right)$ ***c)*** $\dfrac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^5}$ ***d)*** $\dfrac{-1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^5}}$ ***e)*** $-64\, e^{-4x} + 8\, e^{2x}$ ***f)*** $\dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

4 Averigua la expresión de la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ***b)*** $f(x) = 2^x$

Solución: ***a)*** $(-1)^n \cdot (x - n) \cdot e^{-x}$ ***b)*** $(\ln 2)^n \cdot 2^x$

5 Calcula la función derivada de las funciones indicadas a continuación:

a) $f(x) = (2x + 1)^{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = (\ln x)^{x^2 + 1}$

c) $f(x) = x^{x^2}$

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^x$

f) $f(x) = \sqrt[x]{x \cdot \cos x}$

Solución: ***a)*** $(2x + 1)^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{\ln (2x + 1)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}}{2x + 1}\right]$ ***b)*** $(\ln x)^{x^2 + 1}\left[2x \ln (\ln x) + \dfrac{x^2 + 1}{x \ln x}\right]$ ***c)*** $x^{x^2}(2x \ln x + x)$ ***d)*** $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left[\ln (\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right]$ ***e)*** $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \dfrac{2x}{(x - 1)^2}\right]$ ***f)*** $\sqrt[x]{x \cdot \cos x}\left[\dfrac{1 - \ln (x \cos x)}{x^2} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right]$

6 Halla y':

a) $x + xy - x^2y^2 = 3$ ***b)*** $x^y = y^x$

Solución: ***a)*** $\dfrac{2xy^2 - y - 1}{x - 2x^2y}$ ***b)*** $\dfrac{y \cdot (x \ln y - y)}{x \cdot (y \ln x - x)}$

7 Si $f(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, determina $(f \circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ y $(g^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Solución: $(f \circ g)'(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)$ $\quad (g^{-1})'(1/2) = 1$

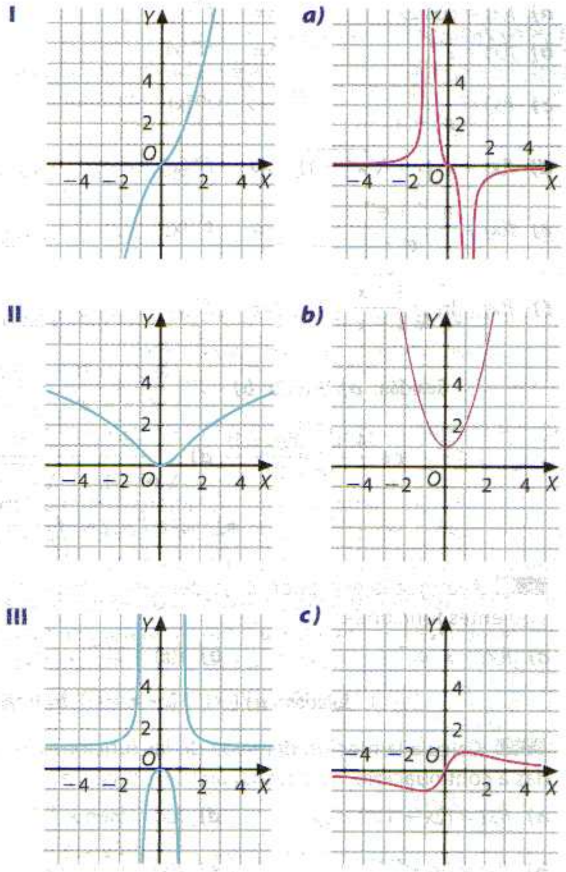
8 Dadas las funciones:

$$f(x) = x^2 + \pi \qquad g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

calcula la derivada en $x = 0$ de las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Solución: $[f(g(0))]' = 2 \quad [g(f(0))]' = 0$

9 Relaciona las gráficas de las dos columnas, de manera que a cada función le asignes su derivada.



Figuras 9.28.

10 La gráfica de una función es la que se muestra en la figura. ¿Cuál es la gráfica de su función derivada? ¿En qué puntos no es continua la derivada?

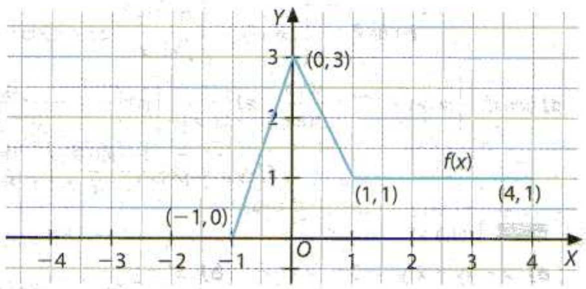


Figura 9.29.

Solución: No es continua en $x = 0$ y $x = 1$

Derivada de una función en un punto

11 PAU Considera la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calcula el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$. Determina si hay otros puntos en los cuales la pendiente de la recta tangente sea igual a la obtenida.

Solución: $m = -1$. También tiene esa pendiente la recta tangente por $x = -2$

12 Aplica la definición de derivada de una función en un punto y calcúlala para las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) $f(x) = -1 + x$ en $x = -1$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $x = 2$

c) $f(x) = (1 - x)^2 + 1$ en $x = 1$

d) $f(x) = \ln(2x + 1)$ en $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ en $x = 2$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ en $x = -1$

g) $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $x = 1$

Solución: ***a)*** $f'(-1) = 1$ ***b)*** $f'(2) = 2$ ***c)*** $f'(1) = 0$ ***d)*** $f'(0) = 2$ ***e)*** $f'(2) = 1/9$ ***f)*** $f'(-1) = \sqrt{2}/4$ ***g)*** $\nexists\, f'(1)$

13 PAU Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: $x + 4y - 3 = 0$

14 PAU Averigua las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $f(x) = \ln(2 - x)$ en $x = 1$.

Solución: Recta tangente: $y = -x + 1$. Recta normal: $y = x - 1$

15 PAU Calcula las ecuaciones de las tangentes a la curva $2x^2 + y^2 = 1$ que pasan por el punto (1, 1).

Solución: $y = 1$; $y = 4x - 3$

16 PAU Halla el punto de la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente $-2\sqrt{\pi}$ y escribe su ecuación.

Solución: El punto es cuando $x = \sqrt{\pi}$ y la ecuación de la recta $y = -2\sqrt{\pi}x + 2\pi$

17 PAU Averigua los puntos de la gráfica de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$, en que la recta tangente es paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.

Solución: (1/3, 2/9), (1/9, 22/243)

18 PAU ¿En qué punto la recta tangente a la función $f(x) = x \cdot e^x$ es paralela al eje de abscisas? Escribe la ecuación de la recta tangente en este punto.

Solución: El punto de tangencia es $P(-1, -e^{-1})$, la recta tangente tiene por ecuación $y = -\dfrac{1}{e}$

19 Calcula las abscisas de los puntos de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ en que la tangente es paralela a la secante que corta la curva en $x = 0$ y $x = 1$.

Solución: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}$

20 PAU Halla el valor de a y b para que la recta tangente a la curva de $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1$ en el punto (1/2, 0) sea paralela al eje de abscisas.

Solución: $a = 16$, $b = -8$

21 PAU Averigua para que valor de x la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$. Escribe la ecuación de esta recta tangente.

Solución: $y = x + \ln 2 - 1$

22 PAU Dada la parábola $y = x^2$:

a) Halla la ecuación de su recta tangente que es paralela a la recta $-4x + y + 3 = 0$.

b) Halla las ecuaciones de sus tangentes que pasan por el punto (2, 0).

Solución: ***a)*** $y = 4x - 4$ ***b)*** $y = 0$ e $y = 8x - 16$

23 PAU Considera la función $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x}$:

a) Halla los puntos de la gráfica en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

b) Calcula la ecuación de estas rectas tangentes.

Solución: ***a)*** $P_1(2, -1/2)$ y $P_2(-2, -7/2)$ ***b)*** $y + 1/2 = (-3/4)(x - 2)$ e $y + 7/2 = (-3/4)(x + 2)$

24 PAU Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln(3x - 2)$ en $x = 2$, y en qué punto la tangente es perpendicular a la anterior.

Solución: $m = \dfrac{3}{4}$ y $\nexists P$ tal que la tangente tenga pendiente $-\dfrac{4}{3}$

25 PAU Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, averigua los puntos en que la recta tangente es perpendicular a la tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución: (0, 0), (1, ln 3)

26 Averigua el número de rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ que contienen el punto (0, 1).

Solución: 1

27 PAU Determina en qué punto $a \in (0, \pi)$, la tangente a la curva $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: $a = \dfrac{3\pi}{4}$

28 PAU Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$, halla la ecuación de la recta tangente que es paralela a la recta que une los puntos de dicha parábola de abscisas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución: $y = 2x + 1$

29 PAU Halla los puntos de la parábola $y = -2(x - 2)^2$ cuya recta tangente pasa por el origen de coordenadas. A continuación averigua las ecuaciones de dichas tangentes.

Solución: $P(2, 0) \rightarrow y = 0$, $P(-2, 0) \rightarrow y = 16x$

30 PAU Dada la función $f(x) = x^3$, averigua si la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa 3 pasa por el punto (1, 5).

A continuación, encuentra todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 5) y son tangentes a la gráfica en algún punto.

Solución: Tangente en $x = 3$: $y = 27x - 54$.
Tangente que pasa por (1, 5): $y = 3x + 2$

31 PAU Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución: ***a)*** $a = \pm\sqrt{m}$ ***b)*** $m = \dfrac{1}{4}$

32 PAU Halla la derivada [illegible]
Calcula a y b si (0, 0) es un punto [illegible] la recta tangente es el eje OX.

Solución: $f'(x) = a + \cos x$; $b = 0$, $a =$ [illegible]

Continuidad y derivabilidad

33 PAU Indica en qué puntos $f(x) = |2x^2 + x - 1|$ no es derivable.

Solución: $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = -1$

34 PAU Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ en $x = 0$.

35 PAU Razona si son derivables en el cero cada una de las siguientes funciones de variable real:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ***b)*** $g(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

36 Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa, pon un ejemplo ilustrativo.

a) Para cualquier función polinómica de segundo grado existe un punto tal que la recta tangente a la función en ese punto es una recta paralela al eje de abscisas.

b) Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifican $h'(x) = g'(x)$, entonces $h(x) = g(x)$.

37 PAU Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

38 PAU Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} E(x - 1) & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{4 - 2x}{x^2 - 9} & \text{si } 2 \le x \le \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

39 PAU Sea f la función definida por $\begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \ge 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

Solución: $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \ge 0 \\ (1 - 2x^2)e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

40 PAU Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - x|x|$.

a) Esboza la gráfica de f.

b) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: ***c)*** $y = -4x + 6$

41 PAU Estudia la derivabilidad de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - |x|} & \text{si } x \ne -1 \text{ y } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$

Ejercicios y problemas

42 PAU Estudia la derivabilidad de $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcula la función derivada.

Solución: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

43 PAU Considera la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

¿Existen valores de a con los cuales f sea derivable en toda la recta real? En cualquier caso, razona la respuesta y, si es afirmativa, encuentra dichos valores.

44 PAU Se sabe que la función $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - (1/2)x + c & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$ es derivable en el intervalo $(-1, 1)$.

a) Determina el valor de la constante c.

b) Calcula la función derivada f'.

c) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

Solución: ***a)*** $c = 1$ ***b)*** $f'(x) = \begin{cases} 4x - 1/2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

c) $y = -x + \dfrac{31}{32}$ e $y = -x + \dfrac{5}{4}$

45 PAU Determina los valores de los parámetros a y b para que la función siguiente sea continua y derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución: $a = 7/2, b = 4$

46 Determina el valor del parámetro a para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{-x}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$.

Solución: No es derivable en $x = 1$ para ningún valor de a

47 PAU Averigua el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ a \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución: $a = 1, b = 0$

48 PAU Se sabe que la función $f: [0, 5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo $(0, 5)$. Calcula las constantes a y b.

Solución: $a = -7/2$ y $b = 1$

49 PAU Determina b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Sea derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

Solución: ***a)*** $b = 13$ y $c = -16$ ***b)*** $y = 3x - 2$

50 PAU Determina:

a) Los valores de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

admite recta tangente en el punto $(0, 1)$.

b) Los valores de las constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ cx^2 + d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

admite recta tangente en el punto $(0, 1)$.

Solución: ***a)*** $a = -1, b = 1$ ***b)*** $c = -1, d = 1$

51 PAU Calcula los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x. Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución: $a = 1, b = -2$

Ejercicios de aplicación

52 PAU Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

b) Halla los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado ***a)*** corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución: ***a)*** $y = a^2 - 2ax + 1$

b) En $x = 0$, $A(0, a^2 + 1)$. En $y = 0$, $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$ ***c)*** $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

53 PAU Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por:

$f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{si } x < a \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$, donde a es un número real.

a) Determina a.

b) Halla la función derivada de f.

Solución: ***a)*** $a = 3$ ***b)*** $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

54 PAU La curva $f(x)$ de la figura tiene por dominio el conjunto de los números reales.

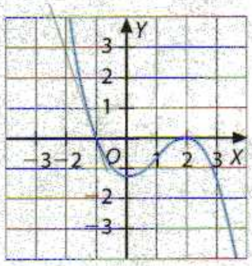


FIGURA 9.30.

a) Determina los puntos en los que la función vale 0. Determinar los valores de x para los cuales la función es positiva.

b) Calcula en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$.

c) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

d) Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

e) Determina a sabiendo que $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$.

Solución: ***a)*** La función vale 0 para $x = -1$ y para $x = 2$, y es positiva para $x < -1$. ***b)*** La derivada se anula para $x = 0$ y para $x = 2$ y $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 2$. ***c)*** $y = 0$ ***d)*** $y = -3x - 3$ ***e)*** $a = -1/3$

55 PAU En la figura se puede ver parte de la gráfica de una función f que está definida en el intervalo $(-3, 3)$ y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.

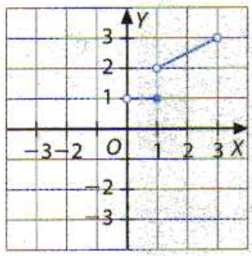


FIGURA 9.31.

a) Razona cuál debe ser el valor de $f(0)$.

b) Completa la gráfica de f.

c) Halla $f'(x)$ para los $x \in (-3, 3)$ en los que dicha derivada exista.

Solución: ***a)*** No existe $f(0)$ ***c)*** $f'(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } -3 < x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$

56 PAU Un globo de radio r, que contiene hidrógeno, aumenta su volumen un 5 %. Calcula su variación de área.

Solución: 3,33 %

57 Dadas las curvas $y = x^2 - 1$ y $x^2 + xy - 1 = 0$, averigua sus puntos de intersección y calcula las pendientes de las rectas tangentes en cada uno de ellos. A continuación, halla para cada punto el ángulo que forman dichas tangentes.

Solución: Puntos de intersección $(1, 0)$, $(-1, 0)$. Para $y = x^2 - 1$, la pendiente en $(1, 0)$ es 2 y en $(-1, 0)$ es -2. Para $x^2 + xy - 1 = 0$ la pendiente en los dos puntos es -2. El ángulo que forman las tangentes en $(1, 0)$ es 53,13° y en $(-1, 0)$ forman un ángulo de 0°

58 PAU Halla la ecuación de las tangentes a la curva de ecuación $2x^2 - y^2 + xy = 0$ en los puntos $x = 1$.

Solución: En $(1, -1)$ la tangente es $y = -x$. En $(1, 2)$ la tangente es $y = 2x$.

59 Calcula los valores de a para los que las tangentes a las curvas $y = e^x$ e $y = e^{-2x}$ en los puntos (a, e^a) y (a, e^{-2a}) sean perpendiculares.

Solución: $a = \ln 2$

60 A partir del enunciado anterior, estudia si puede existir algún valor de a para que las tangentes en los puntos indicados sean paralelas.

Solución: No es posible

61 PAU Un incendio se extiende en forma circular de manera uniforme. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1,8 m/min.

a) Determina el área quemada en función del tiempo t transcurrido desde el inicio del incendio.

b) Calcula la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio llegue a 45 m

Solución: ***a)*** $3{,}24\pi t^2$ m², donde t está expresado en minutos ***b)*** $6{,}48\pi t$ m²/min

62 PAU Una persona camina a una velocidad constante de 3 m/s y se aleja horizontalmente y en línea recta desde la base de una farola cuyo foco se encuentra a 10 m de altura. Sabiendo que la altura de la persona es 1,70 m, calcula:

a) La longitud de la sombra cuando la persona se encuentra a 5 m de la farola.

b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de empezar a andar.

Solución: ***a)*** $x \cong 1{,}024$ m ***b)*** 0,614 m/s

Actividades de respuesta múltiple

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso:

63 PAU Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ y la recta $r: 2x + y = 6$. Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r.

a) $(1, 4)$ ***b)*** $(4, 1)$ ***c)*** $(4, 0)$

64 PAU Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Determina a y b sabiendo que f es derivable.

a) $a = b = 1$ ***b)*** $a = \frac{1}{3}$ y $b = -1$ ***c)*** $a = \frac{1}{3}$ y $b = 1$

65 Calcula el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas de ecuaciones $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$, en los puntos de intersección de dichas curvas.

a) Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. Son perpendiculares las tangentes en ambos puntos.

b) Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. En (a, b) las tangentes son perpendiculares y en $(-a, -b)$ forman un ángulo de 45°.

c) Puntos de intersección: (a, b) y $(-a, -b)$. En (a, b) las tangentes son perpendiculares y en $(-a, -b)$ forman un ángulo de 0°.